ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Е.В.Скрыдлова

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется класс вырожденных [1] конгруэнций $(\ell,p)_{1,2}$ пар фигур – прямых ℓ и плоскостей p, в которых прямая ℓ описывает однопараметрическое семейство (линейчатую поверхность), а плоскость p -двупараметрическое многообразие (конгруэнцию). Исследование проводится в подвижном репере $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, вершины которого фиксированы следующим образом: вершина A_0 совмещена с характеристической точкой плоскости p; вершины A_1 и A_2 расположены на асимптотических касательных к поверхности (A_0) в точке A_0 и принадлежат касательной плоскости к поверхности (ℓ) в точке M пересечения прямой ℓ с плоскостью p; вершина A_3 помещена на прямую ℓ в четвертую гармоническую точку точке M относительно точек пересечения этой прямой с касательными плоскостями к поверхностям (A_1) и (A_2).

Деривационные формулы репера R имеют вид

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3),$$

где ω_α^β -линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$$

и условию эквипроективности

$$\omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0.$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции $(\ell,p)_{1,2}$ относительно репера R с учетом некоторой нормировки вершин записывается в виде

$$\omega_0^3=0,\ \omega_1^3=\omega^2,\ \omega_2^3=\omega^1,\ \omega_1^0+\omega_2^0=0,\ \omega_3^2-\omega_3^1=t\omega_3^0,$$
$$\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_1^2+\omega_2^1=-q\omega_3^0,\quad \omega_3^0=k_1\omega^1+k_2\omega^2,$$
$$\omega_1^2=\ell_1\omega^1+\ell_2\omega^2,\ \omega_2^1=m_1\omega^1+m_2\omega^2,\ \omega_2^0=p_1\omega^1+p_2\omega^2,$$
$$\omega_3^1=s_1\omega^1+s_2\omega^2,\ \omega_0^0+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2+2\ell_2\omega^1+2m_1\omega^2=0,$$

где формы $\omega_0^1\overset{def}{=}\omega^1$, $\omega_0^2\overset{def}{=}\omega^2$ выбраны в качестве базисных и выполняются конечные соотношения

$$p_1(p_2m_1-p_1m_2)+p_2(p_1\ell_2-p_2\ell_1)=0,$$
$$q(k_1p_2-k_2p_1)+k_2-k_1=0.$$

Рассмотрим класс K конгруэнций $(\ell,p)_{1,2}$, в котором прямолинейные конгруэнции (A_0A_3) и (A_1A_2) образуют двусторонне расслояемую пару. Доказано существование двух проективно эквивалентных классов K_1 и K_2, каждый из которых определяется с произволом одной функции одного аргумента. Система уравнений Пфаффа конгруэнций K_1 записывается в виде

$$\omega_0^3=0,\ \omega_1^3=\omega^2,\ \omega_2^3=\omega^1,\ \omega_1^0+\omega_2^0=0,\ \omega_2^0=t(\omega^1+\omega^2),$$
$$\omega_3^1=\omega_3^2,\ \omega_3^1=t(\omega^2-\omega^1),\ \omega_3^0=k\omega^2,\ \omega_1^2=\ell\omega^2,$$
$$\omega_2^1=\omega_1^2,\ \omega_3^3+\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+2\ell\omega^1=0,\ \omega_1^1-\omega_2^2=-\frac{1}{t}\omega_3^0,$$
$$dt+t(\omega_0^0-\omega_3^3)+2t\omega_1^2+\omega_3^0=0,$$
$$d\ell+\ell(\omega_0^0-\omega_1^1)+\ell^2\omega^1+2\omega_2^0+2\omega_3^1=0.$$

Доказаны некоторые свойства конгруэнций K_1.

Теорема 1. 1) Огибающая поверхность семейства плоскостей p является линейчатой поверхностью с прямолинейной образующей A_0A_1. 2) Прямолинейные конгруэнции (A_0A_3) и (A_1A_2) являются параболическими со сдвоенными фокусами A_3 и M соответственно. 3) Торсы прямолинейной конгруэнции $(A_0 M)$ соответствуют сдвоенным торсам конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_2). 4) Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_3) и (A_2A_3) гармонически разделяют координатную сеть на поверхности (ℓ) в точке A_3.

Найдено уравнение квадрики Ли поверхности (A_0), которое имеет вид:

$$F \equiv x^1x^2 - x^0x^3 - \ell x^1x^3 + t\,(x^3)^2 = 0 .$$

Семейство квадрик Ли поверхности (A_0) является однопараметрическим.

Построена ассоциированная с конгруэнцией K_1 конгруэнция коник C, являющихся линиями пересечения квадрик F с координатными плоскостями $(A_1A_2A_3)$. Коника C определяется уравнениями

$$x^1x^2 - \ell x^1x^3 + t\,(x^3)^2 = 0 , \quad x^0 = 0 .$$

Найдена система уравнений для определения фокальных точек конгруэнции коник C:

$$(x^1 - x^2)^2(x^2 - \ell x^3) = 0 , \quad x^0 = 0 ,$$
$$x^1x^2 - \ell x^1x^3 + t\,(x^3)^2 = 0 .$$

Т е о р е м а 2. Конгруэнция коник C имеет три двукратных фокуса, два из которых являются точками пересечения коники C с прямой ℓ, а третий совпадает с точкой A_1.

Исследованы условия расслоения от конгруэнции коник C к различным линейчатым многообразиям.

Т е о р е м а 3. Конгруэнция коник C расслояема к линейчатой поверхности (A_0A_1) и к прямолинейной конгруэнции (A_0A_2).

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Вып. 3. С. 41-49.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 17 1986

УДК 514.75

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ОБРАЗАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОНГРУЭНЦИЕЙ ЦЕНТРАЛЬНЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРКВАДРИК

Е.П. С о п и н а

В n-мерном аффинном пространстве рассматривается $(n-1)$-мерное многообразие (конгруэнция) V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик. Доказано, что для каждой квадрики $Q_{n-1} \in V_{n-1}$ существует инвариантное $(n-2)$-мерное подпространство, принадлежащее касательной гиперплоскости к гиперповерхности центров. Дана геометрическая характеристика этому подпространству.

Отнесем конгруэнцию V_{n-1} к реперу $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma = \overline{1,n})$, где A - центр гиперквадрики, векторы $\bar{e}_i$ $(i,j,k = \overline{1,n-1})$ лежат в касательной гиперплоскости к гиперповерхности центров (A), а вектор $\bar{e}_n$ направлен по направлению, сопряженному этой гиперплоскости относительно квадрики Q_{n-1}.

Конгруэнции V_{n-1} гиперквадрик Q_{n-1} определяются системой уравнений Пфаффа [1]:

$$\nabla a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta,i}\,\omega^i , \quad \omega^n = 0 , \qquad (1)$$

где $a_{\alpha\beta}$ - коэффициенты уравнения гиперквадрики Q_{n-1}, а ω^α, ω^β_α — компоненты деривационных формул репера, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства: $\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta$, $\mathcal{D}\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma$.

Из уравнений (1.6) [1] следует, что геометрический объект $\{a_{\alpha\beta}\}$ определяет гиперквадрику Q_{n-1}. Обозначим $b_i = a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta,i}$. Система величин $\{b_i\}$ образует геометрический объект [2], который определяет инвариантную $(n-2)$-мерную плоскость

$$b_i x^i = 0 , \quad x^n = 0 , \qquad (2)$$